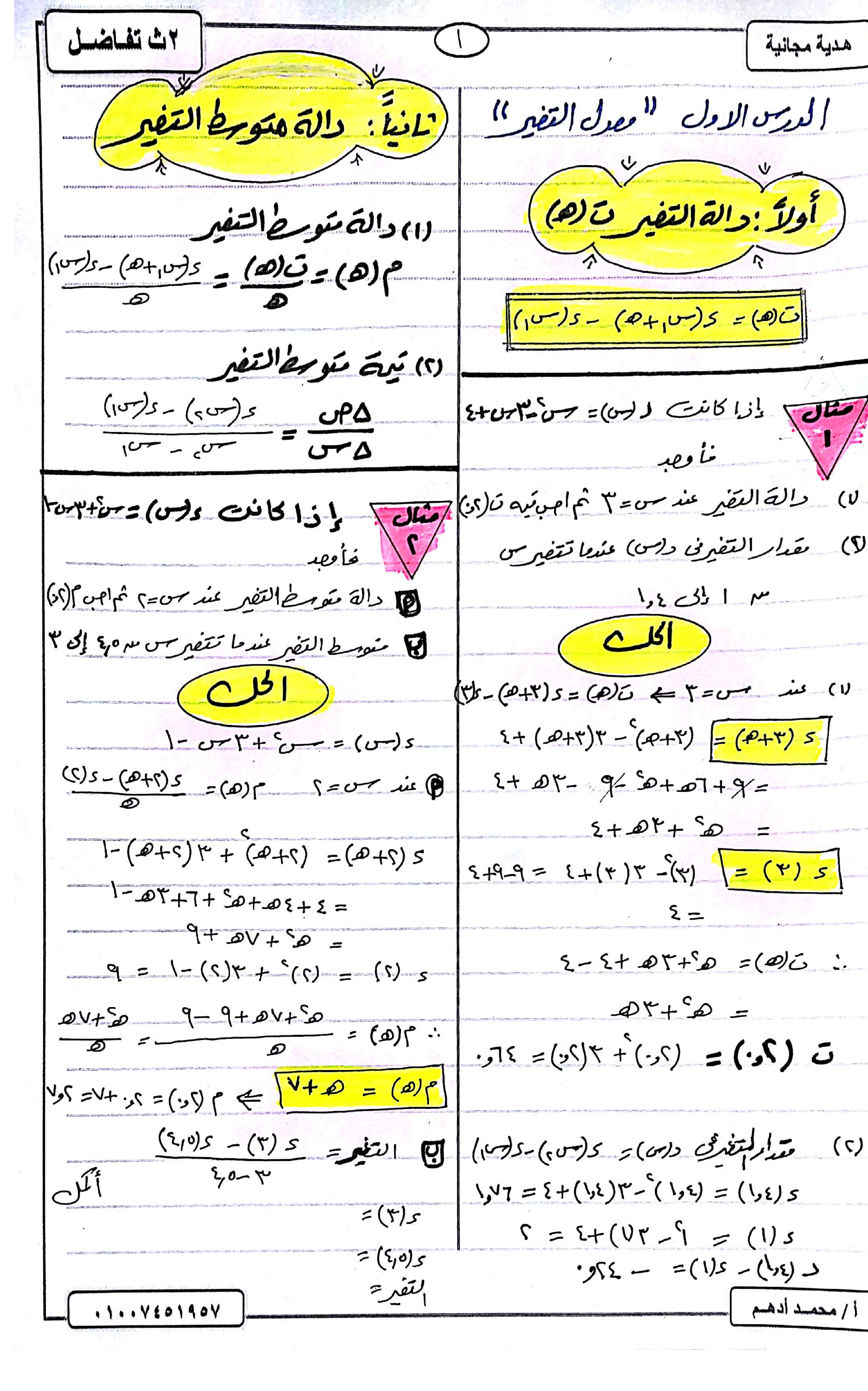


الأدهم
التفاضل + الاحتمالات
الصف الثانى الثانوى
القسم الأدبى
اسم الطالب /
المدرســـة /
الفصـــل /
إعداد أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧



الدرس الاول "معدل التغير"

أولاً: دالة التغير ت(هـ)

ت(هـ) = د(س$_1$ + هـ) − د(س$_1$)

مثال ١: إذا كانت د(س) = س^2 − ٣س + ٤ فأوجد

١) دالة التغير عند س = ٣ ثم أوجد ت(٠,٢)

٢) مقدار التغير في د(س) عندما تتغير س من ١ إلى ١,٤

الحل

١) عند س = ٣ ⟸ ت(هـ) = د(٣+هـ) − د(٣)

د(٣+هـ) = (٣+هـ)^2 − ٣(٣+هـ) + ٤

= ٩ + ٦هـ + هـ^2 − ٩ − ٣هـ + ٤

= هـ^2 + ٣هـ + ٤

د(٣) = (٣)^2 − ٣(٣) + ٤ = ٩ − ٩ + ٤

= ٤

∴ ت(هـ) = هـ^2 + ٣هـ + ٤ − ٤

= هـ^2 + ٣هـ

ت(٠,٢) = (٠,٢)^2 + ٣(٠,٢) = ٠,٦٤

٢) مقدار التغير في د(س) = د(س$_2$) − د(س$_1$)

د(١,٤) = (١,٤)^2 − ٣(١,٤) + ٤ = ١,٧٦

د(١) = ١^2 − ٣(١) + ٤ = ٢

د(١,٤) − د(١) = − ٠,٢٤

ثانياً: دالة متوسط التغير

(١) دالة متوسط التغير

م(هـ) = ت(هـ) / هـ = [د(س$_1$ + هـ) − د(س$_1$)] / هـ

(٢) قيمة متوسط التغير

Δص / Δس = [د(س$_2$) − د(س$_1$)] / (س$_2$ − س$_1$)

مثال ٢: إذا كانت د(س) = س^2 + ٣س − ١ فأوجد

أ) دالة متوسط التغير عند س = ٢ ثم أوجد م(٠,٢)

ب) متوسط التغير عندما تتغير س من ٢,٥ إلى ٣

الحل

د(س) = س^2 + ٣س − ١

أ) عند س = ٢ م(هـ) = [د(٢+هـ) − د(٢)] / هـ

د(٢+هـ) = (٢+هـ)^2 + ٣(٢+هـ) − ١

= ٤ + ٤هـ + هـ^2 + ٦ + ٣هـ − ١

= هـ^2 + ٧هـ + ٩

د(٢) = (٢)^2 + ٣(٢) − ١ = ٩

∴ م(هـ) = [هـ^2 + ٧هـ + ٩ − ٩] / هـ = [هـ^2 + ٧هـ] / هـ

م(هـ) = هـ + ٧ ⟸ م(٠,٢) = ٠,٢ + ٧ = ٧,٢

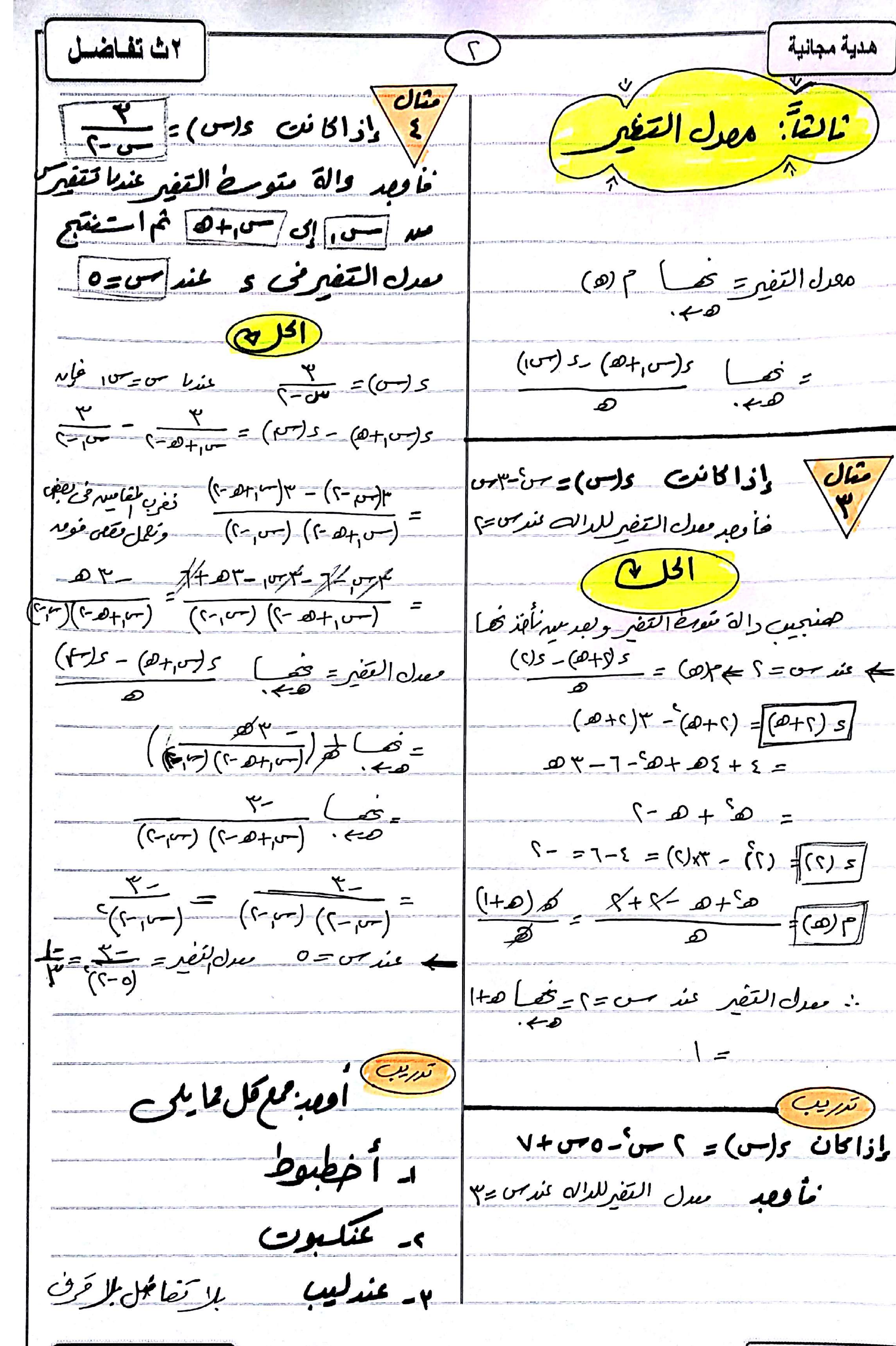
ب) التغير = [د(٣) − د(٢,٥)] / (٣ − ٢,٥)

أكمل

د(٣) =

د(٢,٥) =

التغير =



ثالثاً: معدل التغير

معدل التغير = $\lim_{هـ \to 0}$ م(هـ)

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$

مثال ٣ إذا كانت د(س) = س^2 − ٣س

فأوجد معدل التغير للدالة عند س = ٢

الحل

هنجيب دالة متوسط التغير وبعد منه نأخذ نها

← عند س = ٢ ← م(هـ) = $\frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ}$

د(٢ + هـ) = (٢ + هـ)^2 − ٣(٢ + هـ)

= ٤ + ٤هـ + هـ^2 − ٦ − ٣هـ

= هـ^2 + هـ − ٢

د(٢) = (٢)^2 − ٣ × (٢) = ٤ − ٦ = −٢

م(هـ) = $\frac{هـ^2 + هـ - ٢ + ٢}{هـ} = \frac{هـ(هـ+١)}{هـ}$

∴ معدل التغير عند س = ٢ = $\lim_{هـ \to 0}$ هـ + ١

= ١

تدريب

إذا كان د(س) = ٢س^2 − ٥س + ٧

فأوجد معدل التغير للدالة عند س = ٣

مثال ٤ إذا كانت د(س) = $\frac{٣}{س - ٢}$

فأوجد دالة متوسط التغير عندما تتغير س من س$_1$ إلى س$_1$ + هـ ثم استنتج

معدل التغير في د عند س = ٥

الحل

د(س) = $\frac{٣}{س - ٢}$ عندما س = س$_1$ عادي

د(س$_1$ + هـ) − د(س$_1$) = $\frac{٣}{س_1 + هـ - ٢} - \frac{٣}{س_1 - ٢}$

$= \frac{٣(س_1 - ٢) - ٣(س_1 + هـ - ٢)}{(س_1 + هـ - ٢)(س_1 - ٢)}$ نضرب المقامات في بعض ونعمل مقام موحد

$= \frac{٣س_1 - ٦ - ٣س_1 - ٣هـ + ٦}{(س_1 + هـ - ٢)(س_1 - ٢)} = \frac{-٣هـ}{(س_1 + هـ - ٢)(س_1 - ٢)}$

معدل التغير = $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س_1 + هـ) - د(س_1)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{١}{هـ}\left(\frac{-٣هـ}{(س_1 + هـ - ٢)(س_1 - ٢)}\right)$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{-٣}{(س_1 + هـ - ٢)(س_1 - ٢)}$

$= \frac{-٣}{(س_1 - ٢)(س_1 - ٢)} = \frac{-٣}{(س_1 - ٢)^2}$

← عند س = ٥ معدل التغير = $\frac{-٣}{(٥ - ٢)^2} = \frac{-١}{٣}$

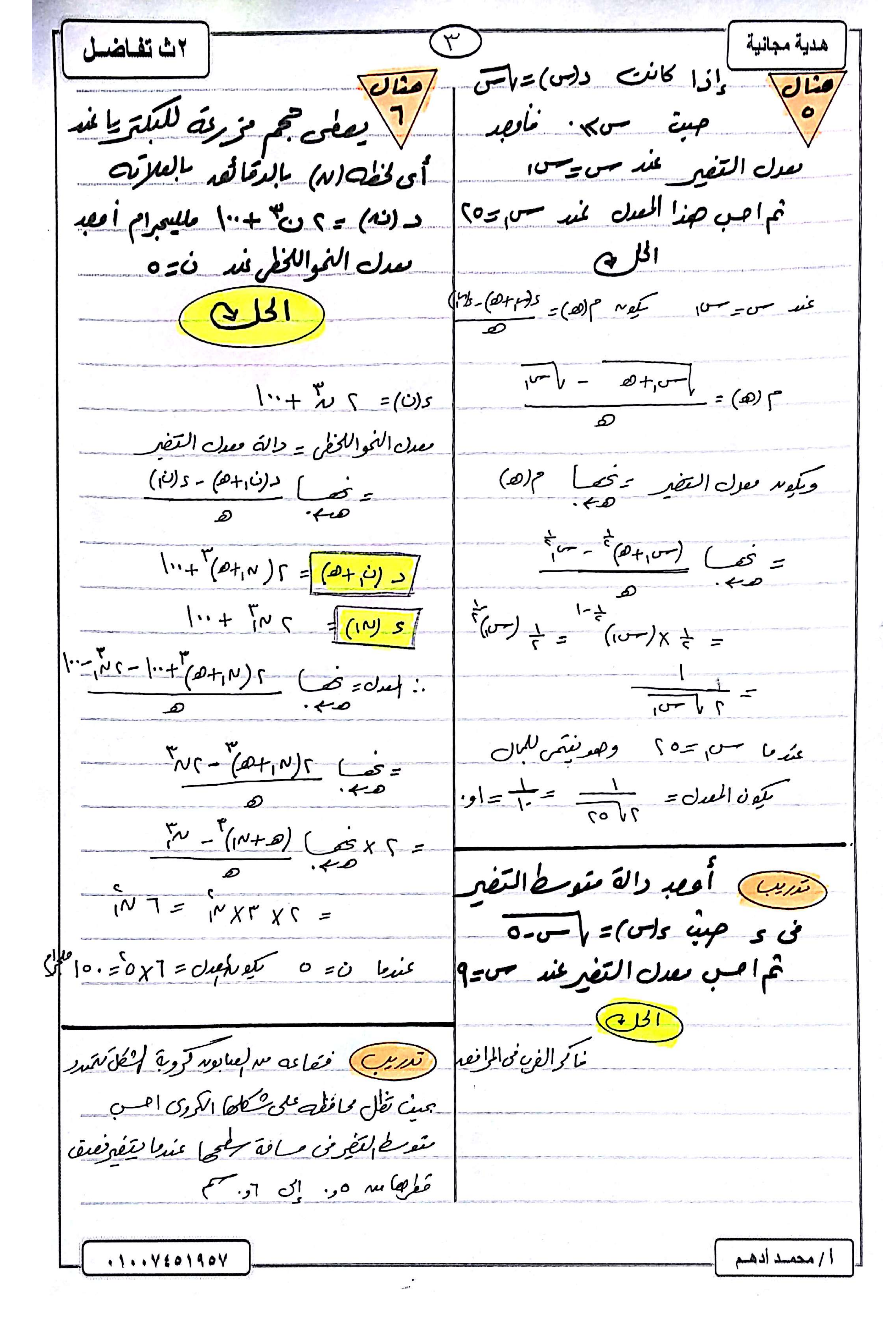
تدريب

أوجد جمع كل ما يلي

١- أخطبوط

٢- عنكبوت

٣- عندليب بلا تفاضل بلا قرف



مثال ٥

إذا كانت د(س) = √س حيث س > ٠ فأوجد معدل التغير عند س = س١ ثم احسب هذا المعدل عند س١ = ٢٥

الحل

عند س = س١ يكون م(هـ) = (د(س١ + هـ) − د(س١)) / هـ

م(هـ) = (√(س١ + هـ) − √س١) / هـ

ويكون معدل التغير = نها (هـ ← ٠) م(هـ)

= نها (هـ ← ٠) ((س١ + هـ)^½ − س١^½) / هـ

= ½ × (س١)^(½ − ١) = ½ (س١)^(−½)

= ١ / (٢ √س١)

عندما س١ = ٢٥ وهو ينتمي للمجال

يكون المعدل = ١ / (٢ √٢٥) = ١/١٠ = ٠,١

تدريب

أوجد دالة متوسط التغير م في د حيث د(س) = √(س − ٥) ثم احسب معدل التغير عند س = ٩

الحل

ناكر الضرب في المرافق

مثال ٦

يعطى حجم مزرعة للبكتريا عند أي لحظة (ن) بالدقائق بالعلاقة د(ن) = ٢ن³ + ١٠٠ ملليجرام أوجد معدل النمو اللحظي عند ن = ٥

الحل

د(ن) = ٢ن³ + ١٠٠

معدل النمو اللحظي = دالة معدل التغير

= نها (هـ ← ٠) (د(ن١ + هـ) − د(ن١)) / هـ

د(ن١ + هـ) = ٢(ن١ + هـ)³ + ١٠٠

د(ن١) = ٢ن١³ + ١٠٠

∴ المعدل = نها (هـ ← ٠) (٢(ن١ + هـ)³ + ١٠٠ − ٢ن١³ − ١٠٠) / هـ

= نها (هـ ← ٠) (٢(ن١ + هـ)³ − ٢ن١³) / هـ

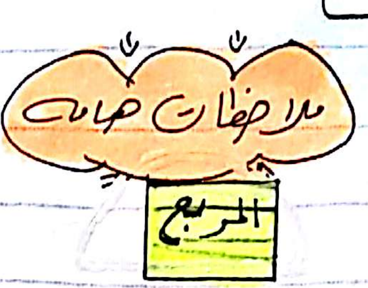
= ٢ × نها (هـ ← ٠) ((هـ + ن١)³ − ن١³) / هـ

= ٢ × ٣ × ن١² = ٦ن١²

عندما ن = ٥ يكون المعدل = ٦ × ٥² = ١٥٠ ملليجرام

تدريب

فقاعة من الصابون كروية الشكل تتمدد بحيث تظل محافظة على شكلها الكروي احسب متوسط التغير في مساحة سطحها عندما يتغير طول قطرها من ٥ سم إلى ٦,٠ سم



المربع

المساحة = (طول الضلع)^2 ⇐ س^2

المحيط = ٤ (طول الضلع) ⇐ ٤ س

المستطيل

المساحة = الطول × العرض

المحيط = (الطول + العرض) × ٢

الدائرة

المساحة = π نق^2

المحيط = ٢ π نق

الكرة

المساحة = ٤ π نق^2

الحجم = $\frac{4}{3}$ π نق^3

المكعب

المساحة الجانبية = ٤ ل^2 ⇐ ٤ س^2

المساحة الكلية = ٦ ل^2 ⇐ ٦ س^2



الحجم = ل^3 ⇐ س^3

مثال ٧

صفيحة معدنية على شكل مربع تتمدد بانتظام محتفظة بشكلها احسب متوسط التغير في مساحة سطحها عندما يتغير طول ضلعها من ٣ سم إلى ٣,٤ سم ثم احسب معدل التغير عندما يكون طول الضلع ٥ سم

الحل

بفرض أن طول الضلع س فإن المساحة د(س)

د(س) = س^2

دالة متوسط التغير = م(هـ)

م(هـ) = $\frac{\text{د(س}_1\text{+هـ) − د(س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$

= $\frac{\text{(س}_1\text{+هـ)}^2 − \text{س}_1^2}{\text{هـ}}$

= $\frac{\text{س}_1^2 + ٢\text{س}_1\text{هـ} + \text{هـ}^2 − \text{س}_1^2}{\text{هـ}}$

= $\frac{\text{هـ(٢س}_1\text{+هـ)}}{\text{هـ}}$ = ٢س$_1$ + هـ

بوضع س$_1$ = ٣ ، هـ = ٣,٤ − ٣ = ٠,٤

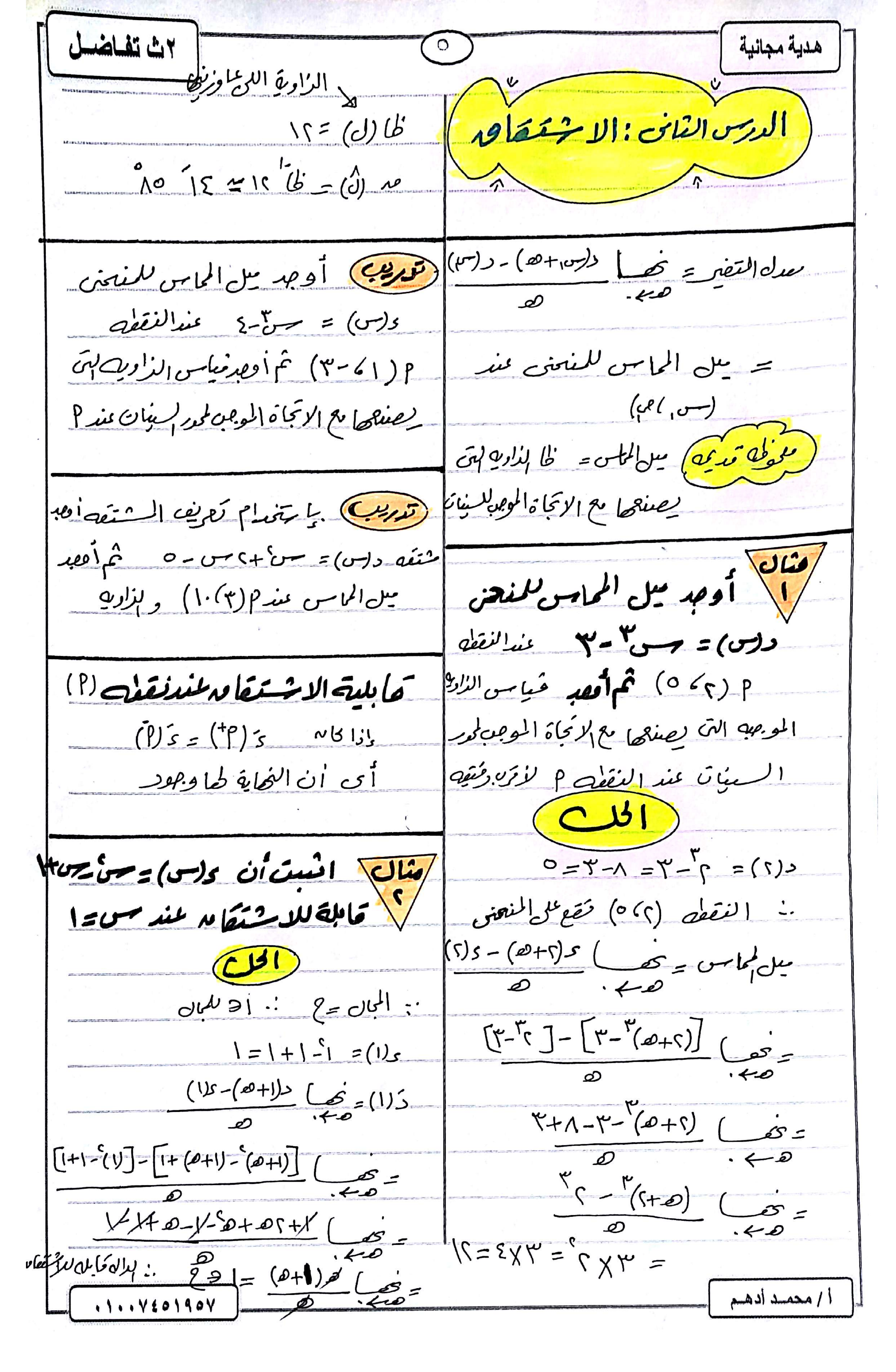
∴ متوسط التغير = ٢ × ٣ + ٠,٤ = ٦,٤

⇐ دالة معدل التغير = $\lim_{\text{هـ} \to 0}$ ٢س$_1$ + هـ

= ٢ س$_1$

وبحساب المعدل عند س = ٥

= ٢ × ٥ = ١٠



الدرس الثاني : الاشتقاق

معدل التغير = نها$_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

= ميل المماس للمنحنى عند ($س_١$ ، $ص_١$)

ملحوظة قديمة: ميل المماس = ظا الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب للسينات

مثال ١ أوجد ميل المماس للمنحنى د(س) = $س^٣ - ٣$ عند النقطة أ(٢ ، ٥) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة

الحل

د(٢) = $٢^٣ - ٣ = ٨ - ٣ = ٥$

∴ النقطة (٢ ، ٥) تقع على المنحنى

ميل المماس = نها$_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ}$

= نها$_{هـ \to ٠}$ $\frac{[(٢+هـ)^٣ - ٣] - [٢^٣ - ٣]}{هـ}$

= نها$_{هـ \to ٠}$ $\frac{(٢+هـ)^٣ - ٣ - ٨ + ٣}{هـ}$

= نها$_{هـ \to ٠}$ $\frac{(٢+هـ)^٣ - ٢^٣}{هـ}$

= $٣ \times ٢^٢ = ٣ \times ٤ = ١٢$

الزاوية اللي عاوزينها ↙

ظا(ل) = ١٢

ق(ل) = $ظا^{-١}$ ١٢ ≃ ٨٥° ١٤َ

تدريب أوجد ميل المماس للمنحنى د(س) = $س^٣ - ٤$ عند النقطة أ(١ ، −٣) ثم أوجد قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند أ

تدريب باستخدام تعريف المشتقة أوجد مشتقة د(س) = $س^٢ + ٢س - ٥$ ثم أوجد ميل المماس عند أ(٣ ، ١٠) والزاوية

قابلية الاشتقاق عند نقطة (أ)

إذا كان دَ($أ^+$) = دَ($أ^-$)

أي أن النهاية لها وجود

مثال ٢ اثبت أن د(س) = $س^٢ - س + ١$ قابلة للاشتقاق عند س = ١

الحل

∵ المجال = ح ∴ أ ∈ للمجال

د(١) = $١^٢ - ١ + ١ = ١$

دَ(١) = نها$_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ}$

= نها$_{هـ \to ٠}$ $\frac{[(١+هـ)^٢ - (١+هـ) + ١] - [(١)^٢ - ١ + ١]}{هـ}$

= نها$_{هـ \to ٠}$ $\frac{١ + ٢هـ + هـ^٢ - ١ - هـ + ١ - ١}{هـ}$

= نها$_{هـ \to ٠}$ $\frac{هـ(١ + هـ)}{هـ}$ = ١ ∈ ح ∴ الدالة قابلة للاشتقاق

مثال ٣ ابحث قابلية الاشتقاق عند س = ٢

د(س) = { س² - ٥ ، س > ٢
  { ٤س - ٩ ، س ≤ ٢

الحل

المجال = ح ∴ الدالة معرفة عند س = ٢

د(٢) = ٤ × ٢ - ٩ = ٨ - ٩ = -١

د̄(٢⁺) = نها (هـ ← ٠⁺) [د(٢+هـ) - د(٢)] / هـ

= نها (هـ ← ٠⁺) ([(٢+هـ)² - ٥] - (-١)) / هـ

= نها (هـ ← ٠) (٤ + ٤هـ + هـ² - ٥ + ١) / هـ

= نها (هـ ← ٠) هـ(٤ + هـ) / هـ = ٤ ← (١)

د̄(٢⁻) = نها (هـ ← ٠⁻) [د(٢+هـ) - د(٢)] / هـ

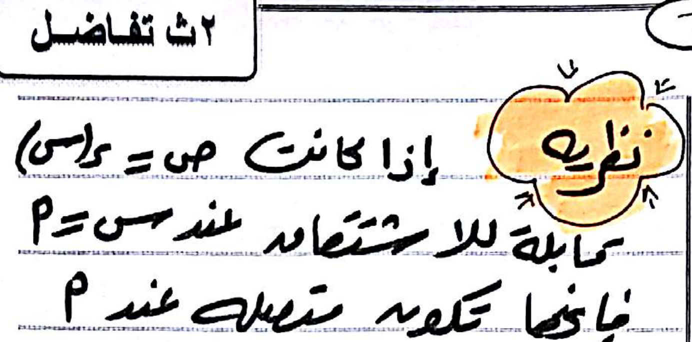
= نها (هـ ← ٠⁻) ([٤(٢+هـ) - ٩] - (-١)) / هـ

= نها (هـ ← ٠⁻) (٨ + ٤هـ - ٩ + ١) / هـ = نها (هـ ← ٠⁻) ٤هـ / هـ

= نها (هـ ← ٠⁻) ٤ = ٤ ← (٢)

∵ د̄(٢⁺) = د̄(٢⁻)

∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٢



نظرية إذا كانت ص = د(س) قابلة للاشتقاق عند س = أ فإنها تكون متصلة عند أ

ملاحظات هامة خالص

١) عكس النظرية غير صحيح دائماً يعني [كل دالة قابلة للاشتقاق تكون متصلة وليس كل دالة متصلة تكون قابلة للاشتقاق]

٢) إذا كانت الدالة غير متصلة عند نقطة فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة

٣) عند بحث قابلية الاشتقاق عند نقطة في مجالها نبدأ أبحث اتصالها فإن كانت متصلة نبحث الاشتقاق وإن كانت غير متصلة فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق.

مثال ٤ ابحث قابلية الاشتقاق عند س = ١

د(س) = { س² + ٢ ، س > ١
  { ٢س + ١ ، س ≤ ١

الحل

أولاً: بحث الاتصال عند س = ١

① د(١) = $1^2 + 2 = 3$

② د(1^+) = $\lim_{س \to 1^+}$ (س² + ٢) = ١ + ٢ = ٣

③ د(1^-) = $\lim_{س \to 1^-}$ (٢س + ١) = ٢ + ١ = ٣

من ① ، ② ، ③ ∴ الدالة متصلة عند س = ١

ثانياً: بحث قابلية الاشتقاق عند س = ١

$د'(1^+) = \lim_{هـ \to 0^+} \frac{د(1+هـ) - د(1)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0^+} \frac{[(1+هـ)^2 + 2] - (3)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0^+} \frac{1 + 2هـ + هـ^2 + 2 - 3}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ(2 + هـ)}{هـ} = 2$

$د'(1^-) = \lim_{هـ \to 0^-} \frac{د(1+هـ) - د(1)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{[2(1+هـ) + 1] - 3}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{2 + 2هـ + 1 - 3}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{2هـ}{هـ} = 2$

∵ $د'(1^+) = د'(1^-)$ ∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١

طويلة شوية بس سهلة

تدريب

ابحث قابلية الاشتقاق عند س = $\frac{\pi}{2}$

د(س) = { جاس ، س ≥ $\frac{\pi}{2}$
{ ١ + جتاس ، س < $\frac{\pi}{2}$

مثال ٥

إذا كانت د(س) = أس² + ب

وميل المماس للمنحنى عند (١ ، -١) الواقعة

عليه = ٨ فأوجد قيمتي أ ، ب

الحل

ميل المماس للمنحنى عند (١ ، -١) = $د'(1) = 8$

$د'(1) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(1+هـ) - د(1)}{هـ} = 8$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{[أ(1+هـ)^2 + ب] - [أ + ب]}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{أ + 2أهـ + أهـ^2 + ب - أ - ب}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ(2أ + أهـ)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} 2أ + أهـ = 2أ = 8$

٢أ = ٨ ∴ أ = $\frac{8}{2}$ = ٤

∵ النقطة (١ ، -١) ∈ للمنحنى الدالة

∴ د(١) = -١

∴ أ + ب = -١

ب = -١ - أ = -١ - ٤ = -٥

الدرس الثالث
قواعد الاشتقاق

١- مشتقة الدالة الثابتة = صفر

$\text{د(س)} = ٥$

$\text{دَ(س)} = \text{صفر}$

٢- مشتقة $\text{د(س)} = \text{س}^{\text{ن}} = \text{ن س}^{\text{ن}-١}$

ننزل الاس وننقص من الاس واحد

$\text{س}^{٥} \leftarrow ٥\,\text{س}^{٤}$

$\text{س}^{٣} \leftarrow ٣\,\text{س}^{٢}$

$\text{س}^{-٤} \leftarrow -٤\,\text{س}^{-٥}$

$٣\,\text{س}^{٧} \leftarrow ٣ \times ٧\,\text{س}^{٦} = ٢١\,\text{س}^{٦}$

$\sqrt{\text{س}} \leftarrow (\text{س}^{\frac{١}{٢}})$

$\frac{١}{٢}\,\text{س}^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٢}\,\text{س}^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

$\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}} \Leftarrow \text{س}^{\frac{٥}{٣}}$

$= \frac{٥}{٣}\,\text{س}^{\frac{٥}{٣}-١} = \frac{٥}{٣}\,\text{س}^{\frac{٢}{٣}}$

$\frac{٥}{٣}\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$

مثال ١ أوجد مشتقة كل مما يلي

(أ) $\text{د(س)} = ٣\,\text{س}^{٤} - ٥\,\text{س}^{٢} + ٧$

$\text{دَ(س)} = ١٢\,\text{س}^{٣} - ١٠\,\text{س}$

(ب) $\text{ص} = ٣\,\text{س}^{٨} - ٢\,\text{س}^{٥} + ٦\,\text{س} + ١$

$\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right) =$

(جـ) $\text{ص} = \frac{٥}{\text{س}} + \text{س}\sqrt{\text{س}} + \sqrt{٣}\,\text{س} - ٤$

$\text{ص} = ٥\,\text{س}^{-١} + \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \sqrt{٣}\,\text{س} - ٤$

$\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right) = -٥\,\text{س}^{-٢} + \frac{٣}{٢}\,\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \sqrt{٣}$

$= \frac{-٥}{\text{س}^{٢}} + \frac{٣}{٢}\sqrt{\text{س}} + \sqrt{٣}$

مشتقة حاصل ضرب دالتين

= **الأولى** × مشتقة الثانية + **الثانية** × مشتقة الأولى

مثال ٢ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ إذا كان

$\text{ص} = (٤\,\text{س}^{٢} - ١)(٧\,\text{س}^{٣} + \text{س})$

ثم أوجد $\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)$ عندما س = ١

الحل

الأولى $(٤\,\text{س}^{٢} - ١)$ — مشتقة الأولى $٨\,\text{س}$

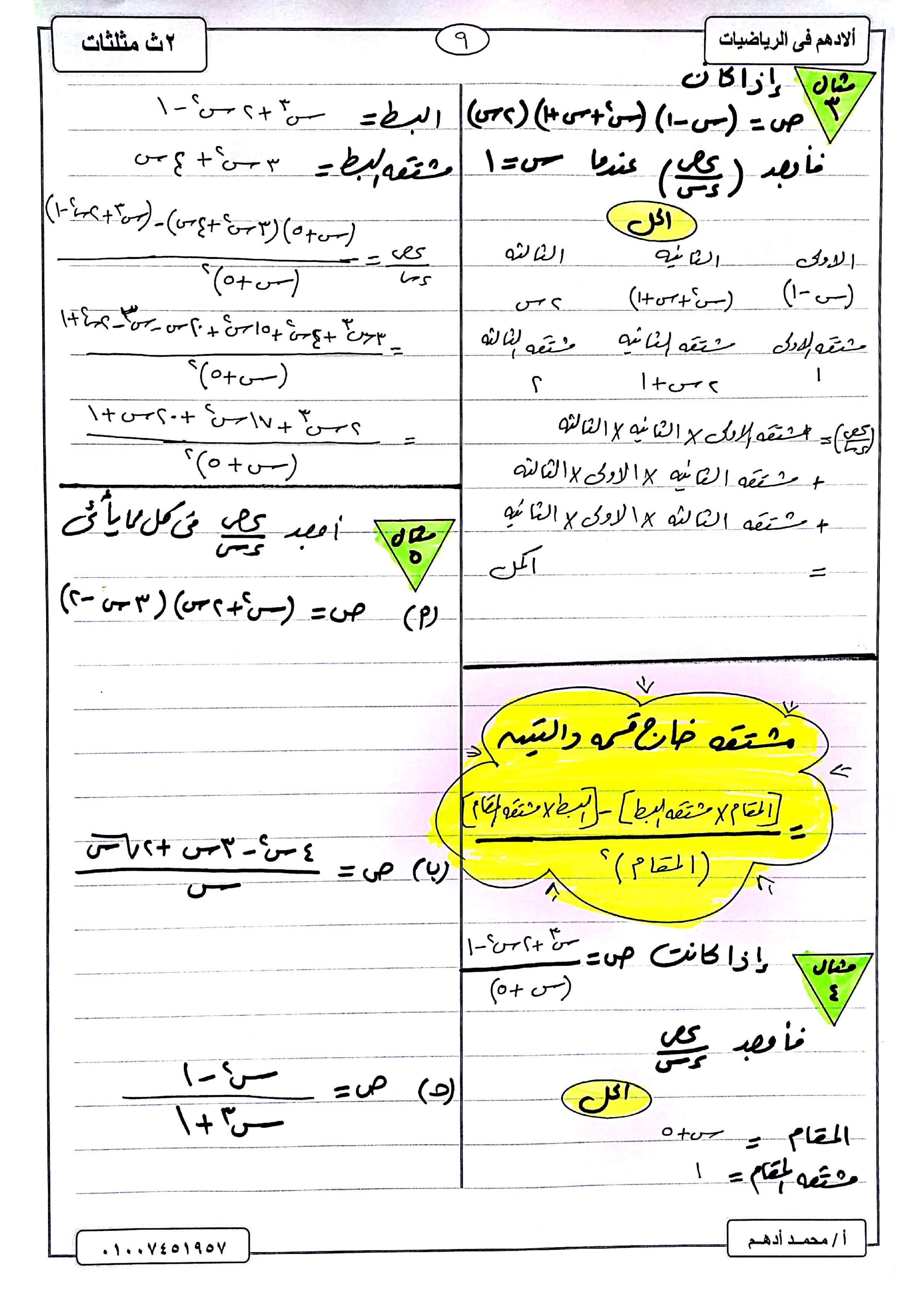
الثانية $(٧\,\text{س}^{٣} + \text{س})$ — مشتقة الثانية $٢١\,\text{س}^{٢} + ١$

$(٤\,\text{س}^{٢} - ١)(٢١\,\text{س}^{٢} + ١) + (٧\,\text{س}^{٣} + \text{س})\,٨\,\text{س}$

عندما س = ١

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٤ - ١)(٢١ + ١) + ٨(٧ + ١)$

$= ١٣٠$



مثال ٣ إذا كان $ص = (س - ١)(س^{٢} + س + ١)(٢س)$

فأوجد $\left(\frac{دص}{دس}\right)$ عندما $س = ١$

الحل

الأولى	الثانية	الثالثة
$(س - ١)$	$(س^{٢} + س + ١)$	$٢س$
مشتقة الأولى	مشتقة الثانية	مشتقة الثالثة
١	$٢س + ١$	٢

$\left(\frac{دص}{دس}\right) =$ مشتقة الأولى × الثانية × الثالثة

\+ مشتقة الثانية × الأولى × الثالثة

\+ مشتقة الثالثة × الأولى × الثانية

= أكمل

مشتقة خارج قسمة دالتين

$$= \frac{[\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}] - [\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}]}{(\text{المقام})^{٢}}$$

مثال ٤ إذا كانت $ص = \frac{س^{٣} + ٢س^{٢} - ١}{(س + ٥)}$

فأوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل

المقام $= س + ٥$

مشتقة المقام $= ١$

البسط $= س^{٣} + ٢س^{٢} - ١$

مشتقة البسط $= ٣س^{٢} + ٤س$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{(س + ٥)(٣س^{٢} + ٤س) - (س^{٣} + ٢س^{٢} - ١)}{(س + ٥)^{٢}}$$

$$= \frac{٣س^{٣} + ٤س^{٢} + ١٥س^{٢} + ٢٠س - س^{٣} - ٢س^{٢} + ١}{(س + ٥)^{٢}}$$

$$= \frac{٢س^{٣} + ١٧س^{٢} + ٢٠س + ١}{(س + ٥)^{٢}}$$

مثال ٥ أوجد $\frac{دص}{دس}$ فى كل مما يأتى

(أ) $ص = (س^{٢} + ٢س)(٣س - ٢)$

(ب) $ص = \frac{٤س^{٢} - ٣س + ٢\sqrt{س}}{س}$

(ج) $ص = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٣} + ١}$



إذا كان $ص = د(ع)$ ، $ع = ر(س)$

فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

مثال ١

إذا كانت $ص = ع^{٤}$ ، $ع = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٧$

فأوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل

$\frac{دص}{دع} = ٤ع^{٣}$

$\frac{دع}{دس} = ٣س^{٢} - ٦س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = ٤ع^{٣}(٣س^{٢} - ٦س)$

بالتعويض عن $ع = (س^{٣} - ٣س^{٢} + ٧)$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٤(س^{٣} - ٣س^{٢} + ٧)^{٣}(٣س^{٢} - ٦س)$

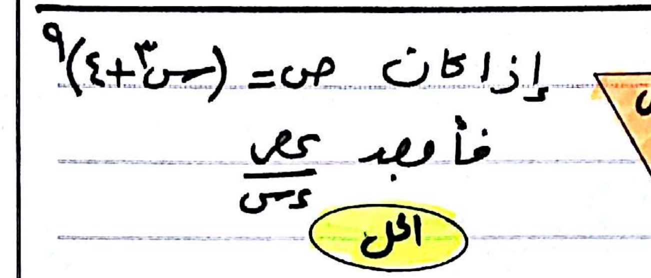
تدريب

إذا كان $ص = ع^{٢} + ع$ ، $ع = ٢س^{٢}$

فأوجد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=١}$

مشتقة $(القوس)^{ن}$

= مشتقة القوس × مشتقة ما بداخل القوس

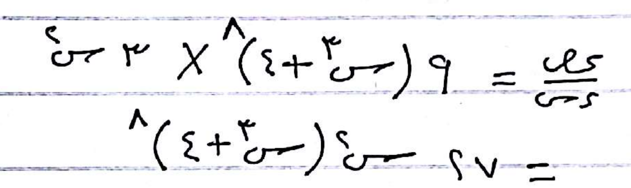


مثال ٢

إذا كان $ص = (س^{٣}+٤)^{٩}$

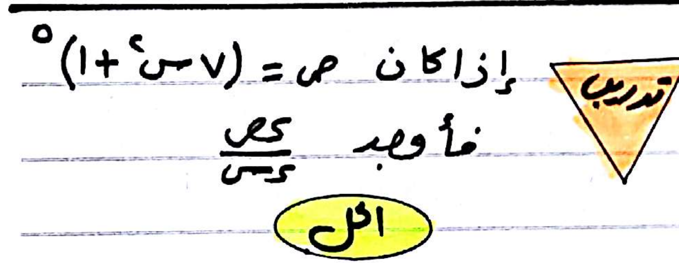
فأوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل



$\frac{دص}{دس} = ٩(س^{٣}+٤)^{٨} \times ٣س^{٢}$

$= ٢٧س^{٢}(س^{٣}+٤)^{٨}$

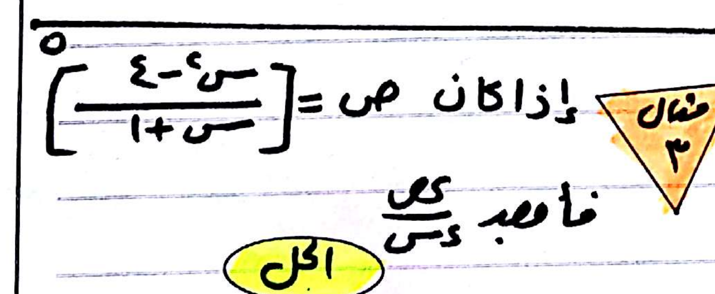


تدريب

إذا كان $ص = (٧س^{٢}+١)^{٥}$

فأوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل



مثال ٣

إذا كان $ص = \left[\frac{س^{٢}-٤}{س+١}\right]^{٥}$

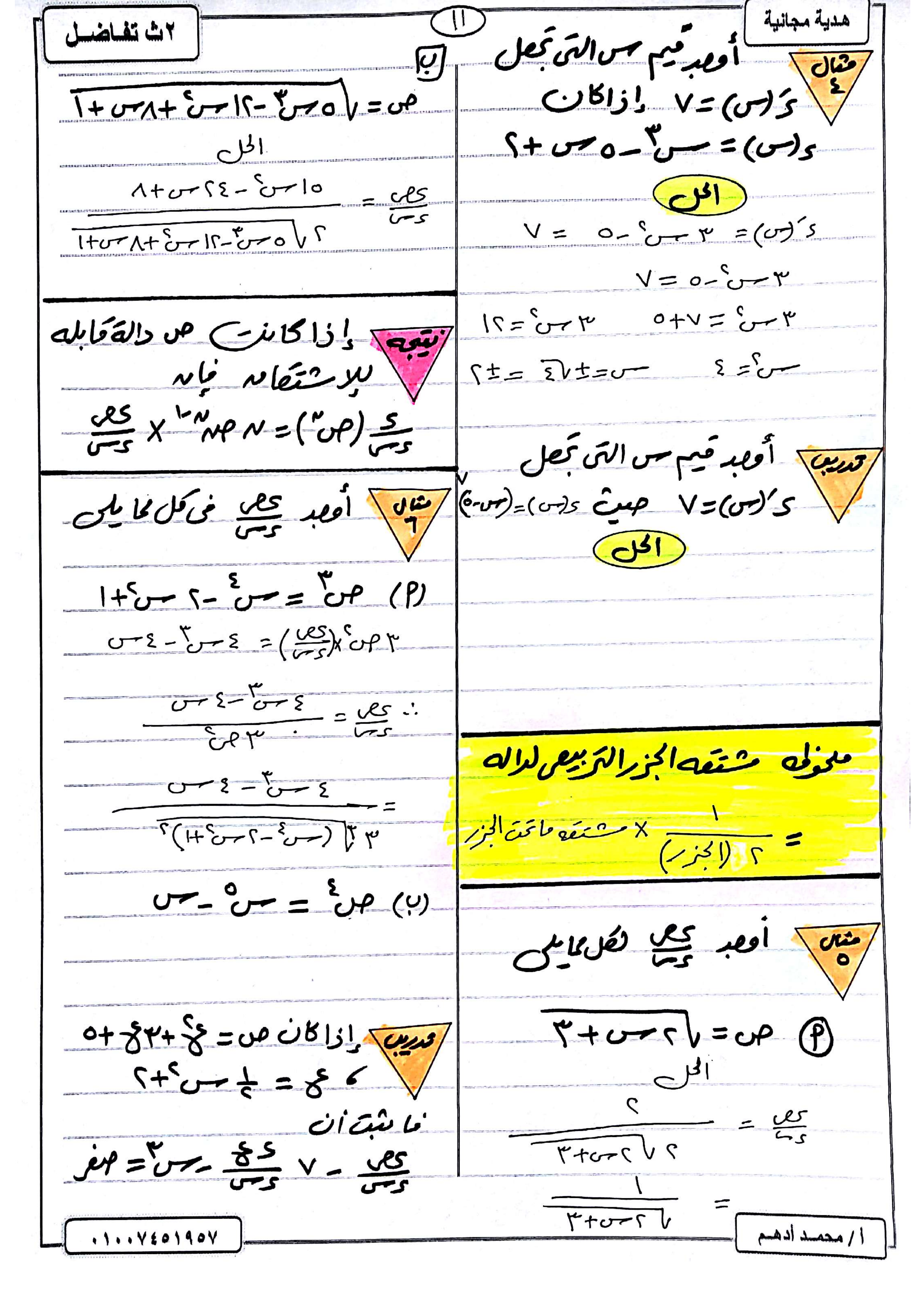
فأوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل

$\frac{دص}{دس} = ٥ \times \left[\frac{س^{٢}-٤}{س+١}\right]^{٤} \times \left[\frac{(س+١)(٢س) - (س^{٢}-٤)\times ١}{(س+١)^{٢}}\right]$

$= ٥ \times \left[\frac{س^{٢}-٤}{س+١}\right]^{٤} \times \left[\frac{س^{٢}+٢س+٤}{(س+١)^{٢}}\right]$

$= \frac{٥(س^{٢}-٤)^{٤}(س^{٢}+٢س+٤)}{(س+١)^{٦}}$



مثال ٤ أوجد قيم س التي تجعل د'(س) = ٧ إذا كان د(س) = س^٣ − ٥س + ٢

الحل

د'(س) = ٣س^٢ − ٥ = ٧

٣س^٢ − ٥ = ٧

٣س^٢ = ٧ + ٥ ، ٣س^٢ = ١٢

س^٢ = ٤ ، س = ±√٤ = ±٢

تدريب أوجد قيم س التي تجعل د'(س) = ٧ حيث د(س) = (س − ٥)^٧

الحل

ملحوظة مشتقة الجذر التربيعي لدالة = ١ / (٢ √(الجذر)) × مشتقة ما تحت الجذر

مثال ٥ أوجد دص/دس لكل مما يلي

(أ) ص = √(٢س + ٣)

الحل

دص/دس = ٢ / (٢ √(٢س + ٣))

= ١ / √(٢س + ٣)

(ب) ص = √(٥س^٣ − ١٢س^٢ + ٨س + ١)

الحل

دص/دس = (١٥س^٢ − ٢٤س + ٨) / (٢ √(٥س^٣ − ١٢س^٢ + ٨س + ١))

نتيجة إذا كانت ص دالة قابلة للإشتقاق فإن

د/دس (ص^ن) = ن ص^(ن−١) × دص/دس

مثال ٦ أوجد دص/دس في كل مما يلي

(أ) ص^٣ = س^٤ − ٢س^٢ + ١

٣ص^٢ × (دص/دس) = ٤س^٣ − ٤س

∴ دص/دس = (٤س^٣ − ٤س) / (٣ص^٢)

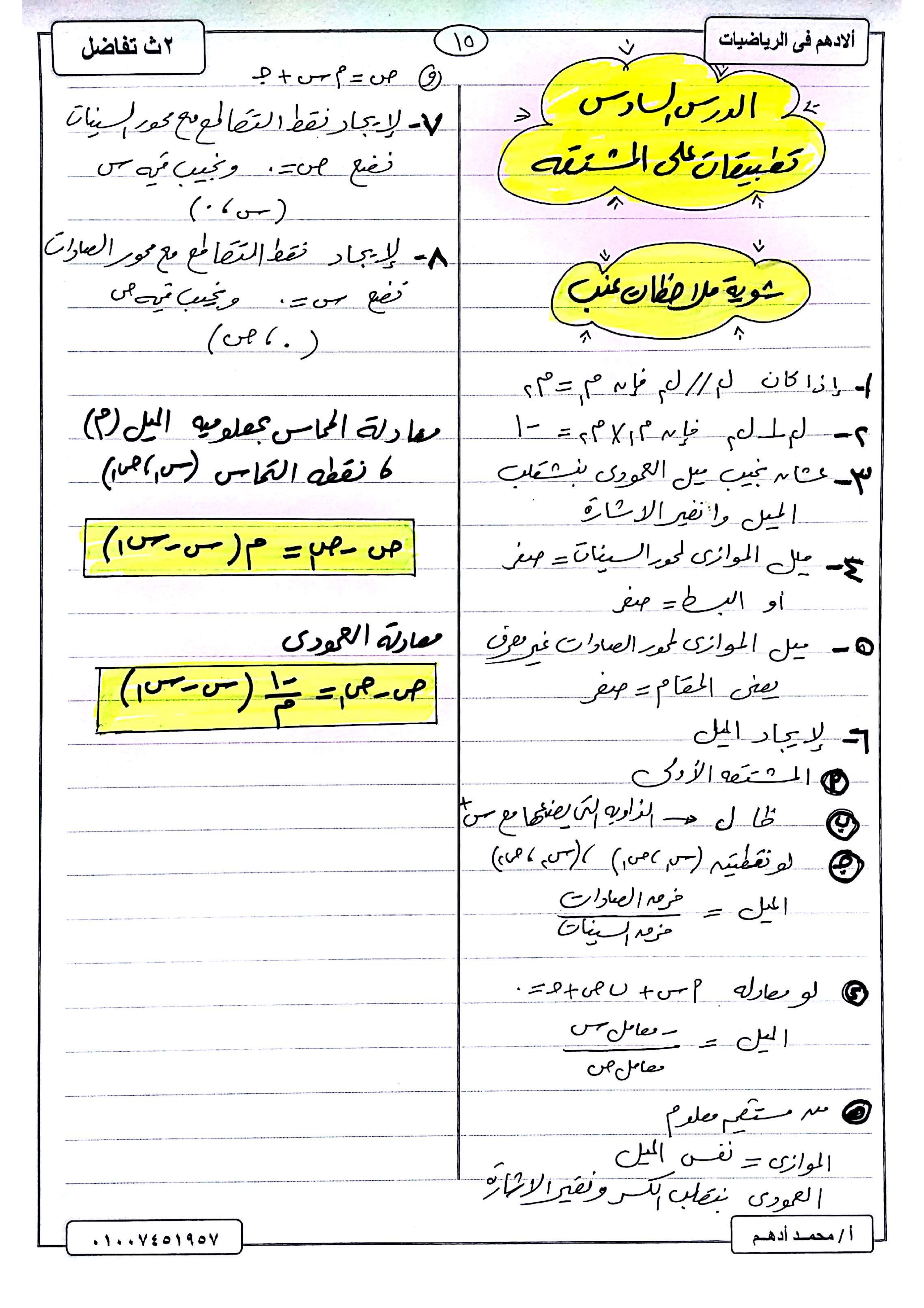
= (٤س^٣ − ٤س) / (٣ ∛((س^٤ − ٢س^٢ + ١)^٢))

(ب) ص^٤ = س^٥ − س

تدريب إذا كان ص = ع^٢ + ٣ع + ٥ ، ع = ½ س^٢ + ٢

فأثبت أن

دص/دس − ٧ دع/دس − س^٣ = صفر



الدرس السادس
تطبيقات على المشتقة

شوية ملاحظات عنب

١- إذا كان $ل_1 // ل_2$ فإن $م_1 = م_2$

٢- $ل_1 \perp ل_2$ فإن $م_1 \times م_2 = -1$

٣- علشان نجيب ميل العمودي بنشقلب الميل ونغير الإشارة

٤- ميل الموازي لمحور السينات = صفر
أو البسط = صفر

٥- ميل الموازي لمحور الصادات غير معرف
يعني المقام = صفر

٦- لإيجاد الميل

(أ) المشتقة الأولى

(ب) ظا ل ← الزاوية التي يصنعها مع $س^+$

(ج) لو نقطتين $(س_1، ص_1)$ ، $(س_2، ص_2)$

$$الميل = \frac{فرق\ الصادات}{فرق\ السينات}$$

(د) لو معادلة $أس + ب ص + جـ = ٠$

$$الميل = \frac{-معامل\ س}{معامل\ ص}$$

(هـ) من مستقيم معلوم

الموازي = نفس الميل

العمودي بنشقلب الكسر ونغير الإشارة

(و) $ص = م س + جـ$

٧- لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات
نضع ص = ٠ ونجيب قيمة س
(س ، ٠)

٨- لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات
نضع س = ٠ ونجيب قيمة ص
(٠ ، ص)

معادلة المماس بمعلومية الميل (م) ، نقطة التماس $(س_1، ص_1)$

$$ص - ص_1 = م(س - س_1)$$

معادلة العمودي

$$ص - ص_1 = \frac{-1}{م}(س - س_1)$$

٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

مثال ١

أوجد ميل المماس لمنحنى $د(س) = س^٢ - ٣س + ١$ عند النقطة $(١، -١)$

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س - ٣$

ميل المماس $= \left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=١} = ٢ - ٣ = -١$

مثال ٢

أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع $\overrightarrow{س}$

$د(س) = (س^٣ - ١)(س + ٢)$ عند $(-١، -٢)$

الحل

$ص = (س^٣ - ١)(س + ٢)$

$= س^٤ + ٢س^٣ - س - ٢$

$\frac{ءص}{ءس} = ٤س^٣ + ٦س^٢ - ١$

ميل المماس $= \left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=-١} = ٤(-١)^٣ + ٦(-١)^٢ - ١$

$= ١$

ظا ل $= ١$ ∴ ل $= ٤٥^{\circ}$

مثال ٣

أوجد النقط الواقعة على المنحنى $ص = س^٢ - ٤س + ٣$ والتي يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س - ٤$

ميل الموازي لمحور السينات = صفر

∴ $٢س - ٤ = ٠$

$٢س = ٤$ $\quad$ $س = ٢$

بالتعويض في معادلة المنحنى [الأصلية]

$ص = ٢^٢ - ٤(٢) + ٣ = -١$

∴ النقطة هي $(٢، -١)$

مثال ٤

أوجد النقط الواقعة على المنحنى $ص = س^٣ - ٦س + ١$ والتي عندها يكون المماس عمودي على المستقيم $س - ٣ص + ٦ = ٠$

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢ - ٦$

∴ ميل المماس $= ٣س^٢ - ٦$

← ميل المستقيم المعطى $= \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$

و ∵ المماس عمودي عليه

∴ ميل المماس $= -٣$

∴ $٣س^٢ - ٦ = -٣$

$٣س^٢ - ٣ = ٠$

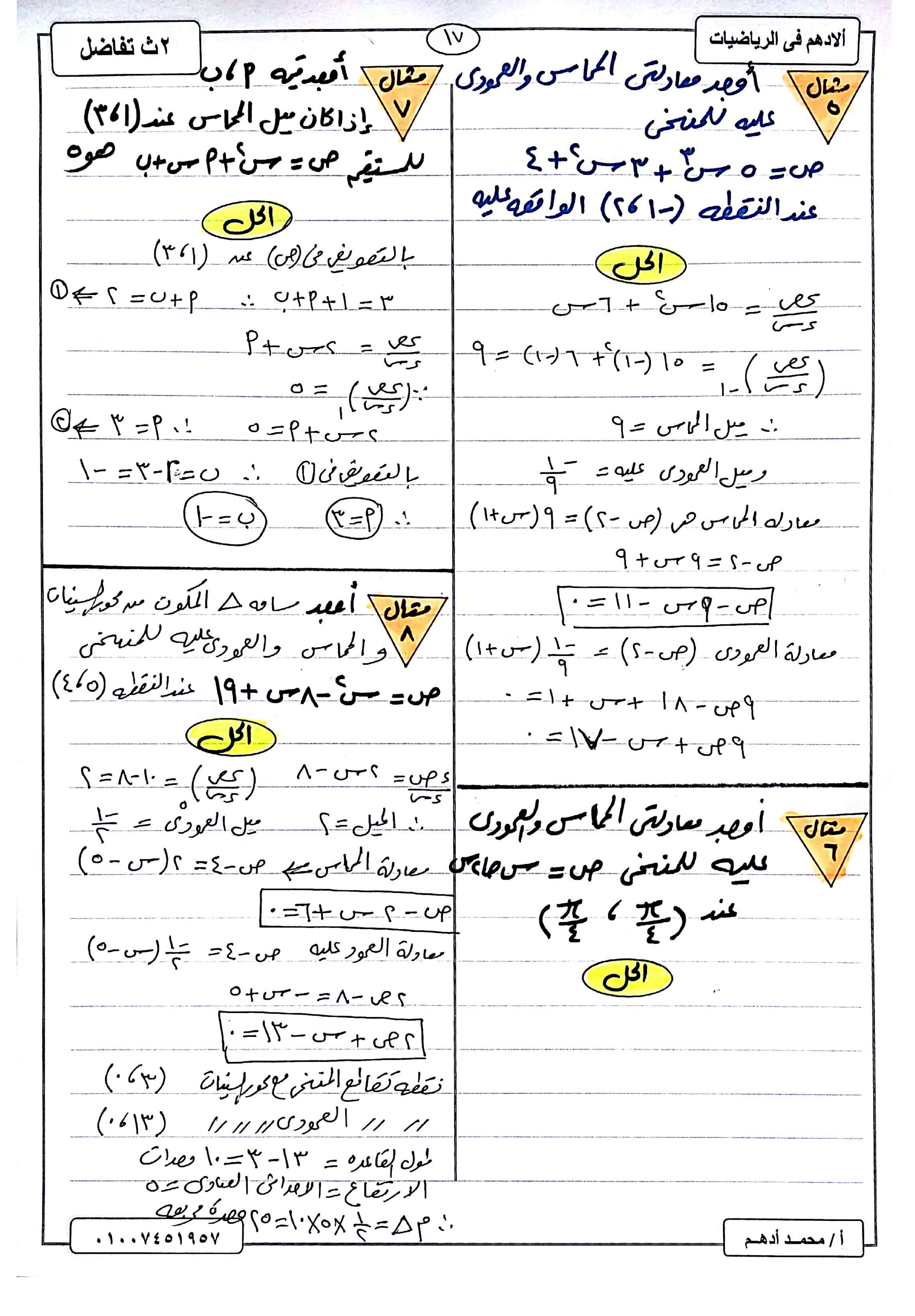
$س^٢ - ١ = ٠$ $\quad$ $(س - ١)(س + ١) = ٠$

$س = \pm ١$

عند $س = ١$ ∴ $ص = -٤$ ∴ النقطة $(١، -٤)$

عند $س = -١$ ∴ $ص = ٦$ ∴ النقطة $(-١، ٦)$

أي ضربه



مثال ٥ أوجد معادلتي المماس والعمودي عليه للمنحنى

ص = ٥ س^٣ + ٣ س^٢ + ٤

عند النقطة (-١، ٢) الواقعة عليه

الحل

دص/دس = ١٥ س^٢ + ٦ س

$(\frac{دص}{دس})_{-1}$ = ١٥ (-١)^٢ + ٦ (-١) = ٩

∴ ميل المماس = ٩

وميل العمودي عليه = $\frac{-1}{9}$

معادلة المماس هي (ص - ٢) = ٩ (س + ١)

ص - ٢ = ٩ س + ٩

ص - ٩ س - ١١ = ٠

معادلة العمودي (ص - ٢) = $\frac{-1}{9}$ (س + ١)

٩ص - ١٨ + س + ١ = ٠

٩ص + س - ١٧ = ٠

مثال ٦ أوجد معادلتي المماس والعمودي عليه للمنحنى ص = س جا س

عند $(\frac{\pi}{4} ، \frac{\pi}{4})$

الحل

مثال ٧ أوجد قيمة أ ، ب إذا كان ميل المماس عند (١، ٣) للمستقيم ص = س^٢ + أ س + ب هو ٥

الحل

بالتعويض في (ص) عند (١، ٣)

٣ = ١ + أ + ب ∴ أ + ب = ٢ ← ①

دص/دس = ٢ س + أ

∵ $(\frac{دص}{دس})_1$ = ٥

٢ س + أ = ٥ ∴ أ = ٣ ← ②

بالتعويض في ① ∴ ب = ٢ - ٣ = -١

∴ أ = ٣ ، ب = -١

مثال ٨ أوجد مساحة △ المكون من محور السينات والمماس والعمودي عليه للمنحنى

ص = س^٢ - ٨ س + ١٩ عند النقطة (٥، ٤)

الحل

دص/دس = ٢ س - ٨ ، $(\frac{دص}{دس})_5$ = ١٠ - ٨ = ٢

∴ الميل = ٢ ، ميل العمودي = $\frac{-1}{2}$

معادلة المماس ← ص - ٤ = ٢ (س - ٥)

ص - ٢ س + ٦ = ٠

معادلة العمود عليه ص - ٤ = $\frac{-1}{2}$ (س - ٥)

٢ص - ٨ = - س + ٥

٢ص + س - ١٣ = ٠

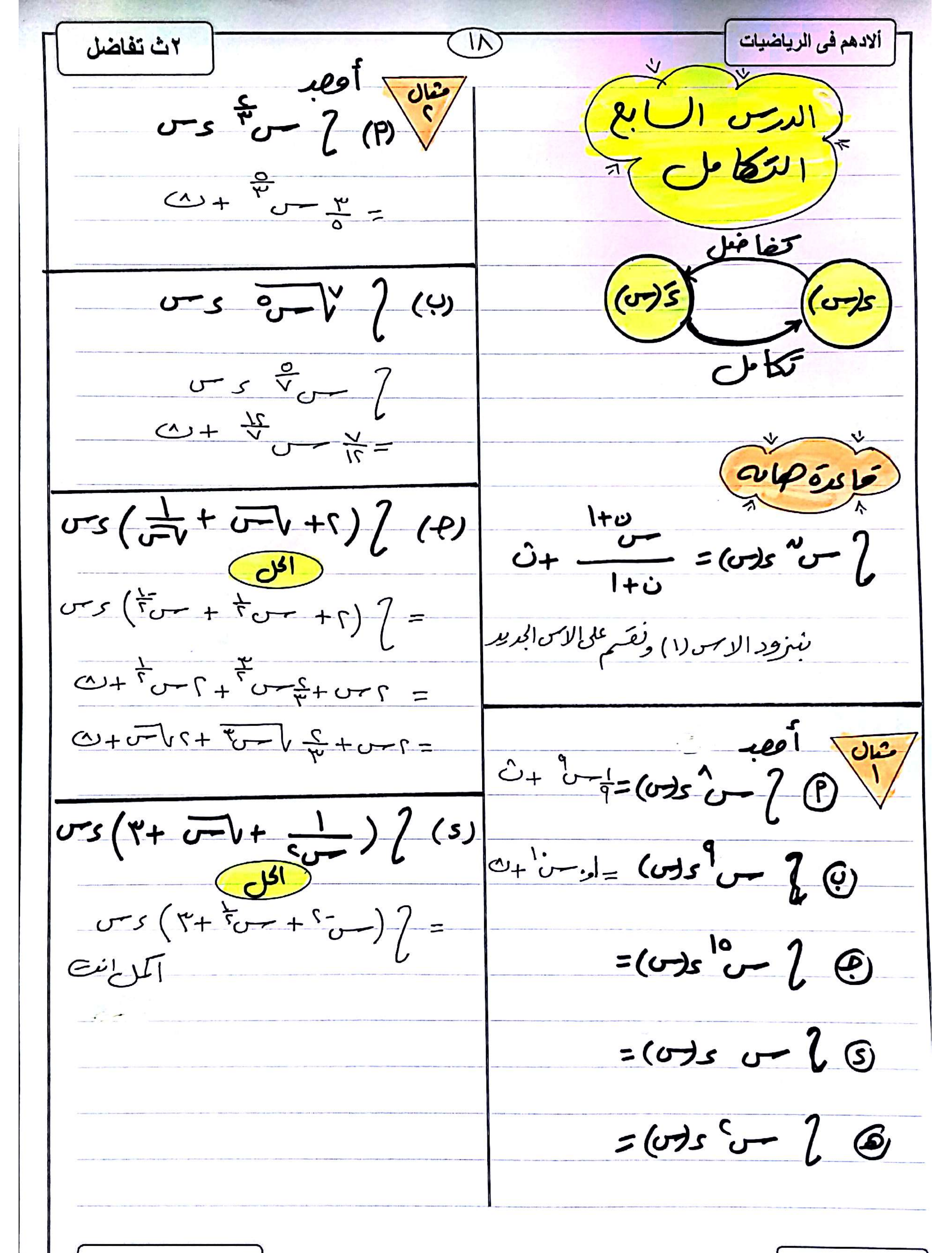
نقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات (٣، ٠)

" " العمودي " " (١٣، ٠)

طول القاعدة = ١٣ - ٣ = ١٠ وحدات

الارتفاع = الاحداثي الصادي = ٥

∴ م△ = $\frac{1}{2}$ × ٥ × ١٠ = ٢٥ وحدة مربعة



الدرس السابع
التكامل

قاعدة هامة

$$\int \text{س}^{\text{ن}} \, \text{د(س)} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$$

بنزود الاس (١) ونقسم على الاس الجديد

مثال ١ أوجد

(أ) $\int \text{س}^{8} \, \text{د(س)} = \frac{1}{9}\text{س}^{9} + \text{ث}$

(ب) $\int \text{س}^{9} \, \text{د(س)} = \frac{1}{10}\text{س}^{10} + \text{ث}$

(ج) $\int \text{س}^{15} \, \text{د(س)} =$

(د) $\int \text{س} \, \text{د(س)} =$

(هـ) $\int \text{س}^{2} \, \text{د(س)} =$

مثال ٢ أوجد

(أ) $\int \text{س}^{\frac{2}{3}} \, \text{د س}$

$= \frac{3}{5}\text{س}^{\frac{5}{3}} + \text{ث}$

(ب) $\int \sqrt[7]{\text{س}^{5}} \, \text{د س}$

$\int \text{س}^{\frac{5}{7}} \, \text{د س}$

$= \frac{7}{12}\text{س}^{\frac{12}{7}} + \text{ث}$

(ج) $\int \left(2 + \sqrt{\text{س}} + \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\right) \text{د س}$

الحل

$= \int \left(2 + \text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{س}^{-\frac{1}{2}}\right) \text{د س}$

$= 2\text{س} + \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} + 2\text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

$= 2\text{س} + \frac{2}{3}\sqrt{\text{س}^{3}} + 2\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$

(د) $\int \left(\frac{1}{\text{س}^{2}} + \sqrt{\text{س}} + 3\right) \text{د س}$

الحل

$= \int \left(\text{س}^{-2} + \text{س}^{\frac{1}{2}} + 3\right) \text{د س}$

أكمل انت



قاعدة واقفه

(1) $\int (\text{أ}\text{س} + \text{ب})^{\text{ن}} \, \text{ء}\text{س} = \frac{1}{\text{أ}} \frac{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$

نقسم على معامل س ونزود الاس (1) ونقسم على الاس الجديد

(2) $\int (\text{د}(\text{س}))^{\text{ن}} \, \text{دَ}(\text{س}) \, \text{ء}\text{س} = \frac{(\text{د}(\text{س}))^{\text{ن}+1}}{(\text{ن}+1)} + \text{ث}$

واذا كان تكامل لقوس مرفوع لاس ومضروب فى مشتقة مابداخل القوس نزود على أس القوس (1) ونقسم على الاس الجديد

مثال 3 أوجد تكامله

(أ) $\int (3\text{س} + 5)^{-9} \, \text{ء}\text{س}$

الحل

$= \frac{1}{3} \times \frac{(3\text{س}+5)^{-9+1}}{-8} + \text{ث}$

$= \frac{-1}{24} (3\text{س}+5)^{-8} + \text{ث}$

مثال 4 (ب) $\int (\text{س}^2 + 3\text{س} - 2)^9 (2\text{س} + 3) \, \text{ء}\text{س}$

الحل

$\because \frac{\text{ء}}{\text{ء}\text{س}} (\text{س}^2 + 3\text{س} - 2) = 2\text{س} + 3$

$\therefore \int (\text{س}^2 + 3\text{س} - 2)^9 (2\text{س} + 3) \, \text{ء}\text{س}$

$= \frac{1}{10} (\text{س}^2 + 3\text{س} - 2)^{10} + \text{ث}$

(جـ) $\int (\text{س}+1)(\text{س}+3)^7 \, \text{ء}\text{س}$

الحل

$\int (\text{س}+3-2)(\text{س}+3)^7 \, \text{ء}\text{س}$

$= \int (\text{س}+3)(\text{س}+3)^7 \, \text{ء}\text{س} - 2\int (\text{س}+3)^7 \, \text{ء}\text{س}$

$= \int (\text{س}+3)^8 \, \text{ء}\text{س} - 2\int (\text{س}+3)^7 \, \text{ء}\text{س}$

$= \frac{1}{9} (\text{س}+3)^9 - 2 \times \frac{1}{8} (\text{س}+3)^8 + \text{ث}$

$= \frac{1}{9} (\text{س}+3)^9 - \frac{1}{4} (\text{س}+3)^8 + \text{ث}$

(د) $\int \text{س}(4\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 4)^5 (2\text{س} - 1) \, \text{ء}\text{س}$

الحل

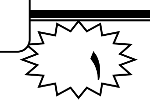
$\because \frac{\text{ء}}{\text{ء}\text{س}} (4\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 4) = 12\text{س}^2 - 6\text{س}$

$\therefore \frac{1}{6} \int (4\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 4)^5 (12\text{س}^2 - 6\text{س}) \, \text{ء}\text{س}$

$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} (4\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 4)^6 + \text{ث}$

$= \frac{1}{36} (4\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 4)^6 + \text{ث}$

ثانياً الاحتمالات



الإحتمـــــــــال

التجربة العشوائية :
هى تجربة نستطيع معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل إجرائها ، ولكن لا يمكن تحديد الناتج الذى سيحدث فعلاً

فضاء العينة :
هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية و عدد عناصرها هو ن (ف)

أمثلة على فضاء العينة :

(١) تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة و ملاحظة الوجه الظاهر :

ف = { ص ، ك } حيث : ن (ف) = ٢

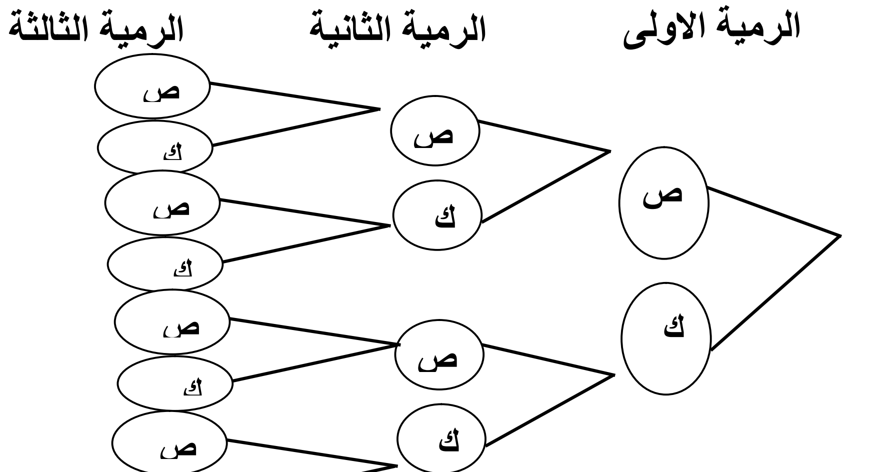
(٢) تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتالتين" قطعتى نقود متمايزتين مرة واحدة " و ملاحظة تتابع ظهور الصور و الكتابات :

الرمية الاولى	الرمية الثانية	النواتج
ص	ص	(ص ، ص)
	ك	(ص ، ك)
ك	ص	(ك ، ص)
	ك	(ك ، ك)

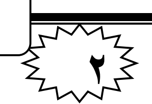
ف = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) } حيث : ن (ف) = $٢^{٢}$ = ٤

(٣) تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية " ثلاث قطع متمايزة نقود مرة واحدة " و ملاحظة تتابع ظهور الصور و الكتابات :

الرمية الاولى — الرمية الثانية — الرمية الثالثة — النواتج



(ص ، ص ، ص)
(ص ، ص ، ك)
(ص ، ك ، ص)
(ص ، ك ، ك)
(ك ، ص ، ص)
(ك ، ص ، ك)
(ك ، ك ، ص)
(ك ، ك ، ك)



ف = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ل) ، (ص ، ل ، ص) ، (ص ، ل ، ل) ، (ل ، ص ، ص) ، (ل ، ص ، ل) ، (ل ، ل ، ص) (ل ، ل ، ل) }

حيث : ن (ف) = $٢^٣$ = ٨

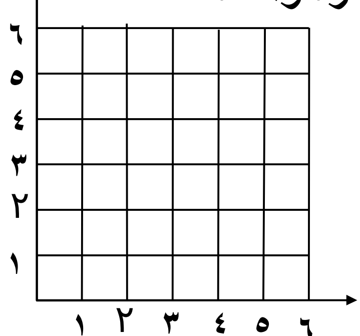
(٤) تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى :

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } حيث : ن (ف) = ٦

(٥) تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتالتين " حجرى نرد متمايزين مرة واحدة " و ملاحظة الأعداد الظاهرة على الوجه العلوى :

ف = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، ..... ، (٦ ، ٦) }

حيث : ن (ف) = $٦^٢$ = ٣٦ اكمل فضاء العينة



الأحداث

الحدث : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة

فإذا كان : م حدث فى ف فإن : م ⊂ ف

و عدد عناصره هو : ن (م) أى عدد فرص وقوع الحدث م

فمثلا : إذا كان م هو حدث ظهور رقم زوجى عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوى فإن : م = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

لاحظ أن : م = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ⊂ ف

* **الحدث المستحيل " ∅ "** = : هو الحدث الذى لا يمكن وقوعه
* **الحدث المؤكد** : هو الحدث الذى له كل النواتج الممكنة
* **الحدث البسيط** : هو حدث يتكون من عنصر واحد و يسمى حدث أولى
* **الحدثان المتنافيان** : هما حدثان لا يمكن وقوعهما معاً

أى أن : هما حدثان تقاطعهما = ∅

تدريب

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة العد الظاهر على الوجه العلوى أكتب كلاً من الأحداث الآتية مبيناً نوع كل حدث :

(١) حدث ظهور عدد أكبر من ٦

(٢) حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٥

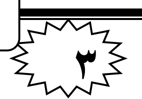
(٣) حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٣

(٤) حدث ظهور عدد أكبر من أو يساوى ١

(٥) حدث ظهور عدد زوجى

(٦) حدث ظهور عدد فردى

ما العلاقة بين الحدثين فى كل من : (٥)



مسلمات الإحتمال

إذا كان : أ حدثاً من أحداث فضاء العينة لتجربة عشوائية ما أى أ ⊂ ف

فإن : إحتمال الحدث أ " ل (أ) " هو عدد حقيقى يحقق ما يأتى :

(١) ل (أ) = $\dfrac{\text{عدد عناصر الحدث أ}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$ = $\dfrac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$

حيث : ٠ ≤ ل (أ) ≤ ١ أى : ل (أ) ∈ [٠ ، ١]

أى أن : إحتمال وقوع أى حدث هو عدد حقيقى موجب لا يزيد عن الواحد الصحيح

(٢) ل (ف) = ١ أى أن : إحتمال الحث المؤكد = ١

(٣) ل (∅) = صفر أى أن : إحتمال الحدث المستحيل = صفر

(٤) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافين من فضاء عينة فإن :

ل (أ ∩ ب) = صفر

، ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

(٥) إذا كان : ف = { أ_1 ، أ_2 ، أ_3 ، ٠٠٠ ، $\text{أ}_{\text{ن}}$ } فإن :

ل (أ_1) + ل (أ_2) + ل (أ_3) + ٠٠٠ ل ($\text{أ}_{\text{ن}}$) = ١

(٦) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة ، أ ⊂ ب فإن :

ل (أ ∩ ب) = ل (أ)

، ل (أ ∪ ب) = ل (ب)

تـدريــب

فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة العد الظاهر على الوجه العلوى

أوجد إحتمال كلاً من الأحداث الآتية مبيناً نوع كل حدث :

(١) حدث ظهور عدد أكبر من ٦

(٢) حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٥

(٣) حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٣

(٤) حدث ظهور عدد أكبر من أو يساوى ١

(٥) حدث ظهور عدد زوجى

احفظ دول

العمليات على الأحداث

الصورة الرمزية	الصورة اللفظية
ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع الحدث أ أو الحدث ب إحتمال وقوع كلا الحدثين إحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل
ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∪ ب)	إحتمال وقوع أ و ب إحتمال وقوعهما معا
ل (أ/) = ١ – ل (أ)	إحتمال عدم وقوع أ
ل (أ – ب) = ل (أ) – ل (أ ∩ ب) ل (أ ∩ ب/) = ل (أ) – ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع أ فقط إحتمال وقوع أ و عدم وقوع ب
ل (ب – أ) = ل (ب) – ل (أ ∩ ب) ل (أ/ ∩ ب) = ل (ب) – ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع ب فقط إحتمال وقوع ب و عدم وقوع أ
ل (أ ∪ ب/) = ١ – ل (ب – أ) ل (ب – أ)/ = ١ – ل (ب – أ)	إحتمال عدم وقوع ب فقط إحتمال وقوع أ أو عدم وقوع ب
ل (أ/ ∪ ب) = ١ – ل (أ – ب) ل (أ – ب)/ = ١ – ل (أ – ب)	إحتمال عدم وقوع أ فقط إحتمال وقوع ب أو عدم وقوع أ
ل (أ/ ∪ ب/) = ١ – ل (أ ∩ ب) ل (أ ∩ ب)/ = ١ – ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع حدث واحد على الأكثر إحتمال عدم وقوع أ و ب معا
ل (أ/ ∩ ب/) = ١ – ل (أ ∪ ب) ل (أ ∪ ب)/ = ١ – ل (أ ∪ ب)	إحتمال عدم وقوع أحدهما على الأقل إحتمال عدم وقوع أ أو ب
ل [(أ – ب) ∪ (ب – أ)] = ل (أ) + ل (ب) – ٢ ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع أحدهما فقط إحتمال وقوع أ أو ب فقط إحتمال وقوع أحدهما دون الآخر

مثال

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما و كان :

ل (أ) = ٠,٤٣ ، ل (ب/) = ٠,٦٨ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣ أوجد :

ل (ب) ، ل (أ/ ∩ ب/) ، ل (ب – أ)

الحل

∵ ل (ب/) = ١ – ل (ب)

∴ ل (ب) = ١ – ل (ب/) = ١ – ٠,٦٨ = ٠,٣٢

∵ ل (أ/ ∩ ب/) = ١ – ل (أ ∪ ب) = ١ – [ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)]

= ١ - [٠,٤٣ + ٠,٣٢ – ٠,٣] = ٠,٤٥

∵ ل(ب – م) = ل (ب) – ل (م ∩ ب)

∴ ل(ب – م) = ٠،٣٢ – ٠,٣ = ٠,٠٢

تمــاريــــــــــن

١ – ألقيت قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين أوجد إحتمال الحصول على :

م – صورة واحدة فقط ب – كتابة واحدة على الأكثر

٢ – ألقيت قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية أوجد إحتمال ظهور :

م – صورة واحدة أو صورتين ب – صورة واحدة على الأقل

٣ – إذا كان أحد الأندية يلعب ٣٠ مباراة في الدوري وكان إحتمـــال تعـــادلـه في عـــدد من المباريات هو ٠,٣ وإحتمال فوزه في عدد من المباريات هو ٠,٥ أوجد عدد المباريات التي يخسرها هذا النادي في الدوري

٤ – صندوق يحتوي علي ٤كرات بيضاء و ٩كرات سوداء و ٧كرات حمراء أختيرت كرة عشوائيا منه أوجـــد إحتمال أن تكون الكرة المختارة : م – بيضاء ب – ليست حمراء

حـ – سوداء أو حمراء

٥ – سحبت بطاقة من بين ٣٠ بطاقة مرقمة من ١ إلي ٣٠ اوجد إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددا

: * زوجيا ويقبل القسمة علي ٥ ** يقبل القسمة علي ٣ أو ٥

٦ – سحبت بطاقة من بين ٤٠ بطاقة مرقمة من ١ إلي ٤٠ اوجد إحتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددا

: * يقبل القسمة علي ٥ أو ٦ ** يقبل القسمة علي ٥ و ٦

٧ – ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي فى كل مرة

أوجد إحتمال : م – مجموع العدديين أكبر من أو يساوى ٧

ب – أن يكون أحد العدديين ٤والمجموع أقل من ٨

٨ – إذا كان م ، ب حدثين من ف ، ل(م) = ! ، ل(ب/) = ٨# ، ل(م ∩ب) = ٨! أوجد :

ل(ب) ، ل (م/ ∩ ب/) ، ل (ب – م)

٩ – إذا كان م ، ب حدثين من ف ، ل(م) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل(م ∩ب) = ٠,١٣

أوجد ل(م/) ، ل(م ∪ ب) ، ل(م/ ∩ ب/)

١٠ – إذا كان م ، ب حدثين من ف ، ل(م/) = ٠,٧ ، ل(ب) =٠,٨ ، ل(م – ب) = ٠,١

أوجد ل[(م ∪ ب) ؛ ل[(م – ب) ∪ (ب – م)]

١١ – إذا كان م ، ب حدثين من ف، ل(م) = # ، ل(ب) = ٨% ، ل(م/ ∩ ب/) = ٨! أوجد

ل(ب/) ؛ ل(ﺃ ∩ ب)

١٢ – إذا كان ﺃ ، ب حدثين متنافيين من ف ، ل(ﺃ) = ٠.٢٧ ، ل(ب) = ٠,٣٥
أوجد ل(ﺃ ∩ب)/ ، ل(ﺃ/ ∩ب/)

١٣ – إذا كان ﺃ ، ب حدثين متنافيين من ف ، ل(ﺃ) = ٨ ، ل(ب) = ٨# أوجد
ل(ﺃ ∪ ب) ؛ ل(ﺃ –ب) ؛ ل(ﺃ/ ∪ ب/)

١٤ – إذا كان ﺃ ، ب حدثين متنافيين من ف بحيث ٢ ل(ﺃ) = ٣ ل(ب) ، ل(ﺃ ∪ ب) = # أوجد
ل(ﺃ) ، ل(ب) ، ل(ب/)

١٥ – إذا كان ﺃ ، ب حدثين من ف ، ل(ﺃ) = ٥# ؛ ل(ﺃ/ ∩ ب/) = ! أوجد ل(ب) إذا كان
* ﺃ ، ب حدثين متنافيين   * ﺃ Ć ب

١٦ – إذا كان ﺃ ، ب حدثين من ف ، ل(ﺃ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٨ ، ل(ﺃ ∩ ب) = ٠,٣ أوجد
إحتمال
* وقوع حدث واحد على الأقل   * عدم وقوع الحدثين ﺃ ، ب معا

١٧ – إذا كان ﺃ ، ب حدثين من ف ، ل(ﺃ) = ٢ ، ل(ب/) = # ، ل(ﺃ ∩ ب) = ٨ أوجد إحتمال
* وقوع الحدث ﺃ فقط   * وقوع كلا الحدثين

١٨ – إذا كان ﺃ ، ب حدثين من ف ، ل(ﺃ) = ٥ ، ل(ب) = ! ، ل(ﺃ ∩ ب) = !٢ أوجد إحتمال
* وقوع أحد الحدثين فقط   * عدم وقوع الحدثين معا

١٩ – يصوب لاعبان ﺃ ، ب فى وقت واحد نحو هدف ما فإذا كان إحتمال أن يصيب اللاعب ﺃ الهدف هو ٥ ، إحتمال أن يصيب اللاعب ب الهدف هو ! ، إحتمال أن يصيب اللاعبان الهدف معا هو !٦ أوجد
* إحتمال إصابة الهدف   * إحتمال إصابة الهدف من اللاعب ﺃ فقط

٢٠ – يصوب جنديان نحو هدف ما فإذا كان إحتمال أن يصيب الجندي الأول الهدف هو ٠,٨٣ ، إحتمال أن يصيب الجندي الثاني الهدف هو ٠,٧٤ ، إحتمال أن يصيب الجنديان الهدف معا هو ٠,٦٥ أوجد
* إحتمال إصابة الهدف   * إحتمال عدم إصابة الهدف